

Плоская задача теории упругости

В теории упругости имеется большой класс задач, важных в смысле практических приложений и вместе с тем допускающих значительные упрощения математической стороны решения. Упрощение заключается в том, что в этих задачах одну из координатных осей тела, например, ось z , можно отбросить и все явления рассматривать происходящими в одной координатной плоскости xOy нагруженного тела. В этом случае напряжения, деформации и перемещения будут являться функциями двух координат – x и y . Такие задачи носят название плоской задачи теории упругости.

Под термином «плоская задача теории упругости» объединяют две физически разные задачи, приводящие к весьма сходным математическим зависимостям:

- 1) задачу о плоском деформированном состоянии (плоская деформация);
- 2) задачу о плоском напряжённом состоянии.

Для этих задач чаще всего характерно значительное отличие одного геометрического размера от двух других размеров рассматриваемых тел: большая длина в первом случае и малая толщина во втором случае.

Плоская деформация

Тело находится в условиях плоской деформации, если перемещения всех его точек параллельны одной и той же плоскости (плоскости деформации) и не зависят от координаты в направлении перпендикулярном к плоскости деформации. Обычно за эту плоскость принимают плоскость xOy .

В этом случае при плоской деформации будем иметь

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y), \quad W = 0.$$

Имеем далее

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma_{xy}(x, y), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0.$$

Здесь σ_z можно выразить через σ_x и σ_y . Действительно

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Таким образом, решение задач теории упругости существенно упрощается, так как мы от пространственной задачи перешли к плоской. Имеем

$$W = 0, \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad Z = 0.$$

Остались следующие неизвестные:

$U, V, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (8 штук). Причем эти неизвестные зависят лишь от переменных x и y .

Из трех уравнений равновесия остаются два:

Лекция №5 (Теория упругости)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (1)$$

Граничных условий тоже два

$$\sigma_x \ell + \tau_{yx} m = \bar{X}, \quad \tau_{xy} \ell + \sigma_y m = \bar{Y}. \quad (n=0, \bar{Z}=0) \quad (2)$$

Соотношений Коши три

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3)$$

Уравнений совместности деформаций Сен-Венана одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4)$$

Уравнений закона Гука три

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \nu\sigma_x + \nu\sigma_y)] = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] = \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right] = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{где } E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Причем в третьем уравнении значение модуля сдвига не меняется

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}.$$

То есть для нахождения 8 неизвестных имеется 8 основных уравнений (1), (3) и (5). Кроме того они должны удовлетворять условиям (2) и уравнению (4).

Плоская деформация будет иметь место, например, в сечениях плотины, (рис. 1) достаточно удаленных от торцов. Предполагается, что плотина имеет большую длину вдоль оси z и нагрузка не зависит от координаты z .

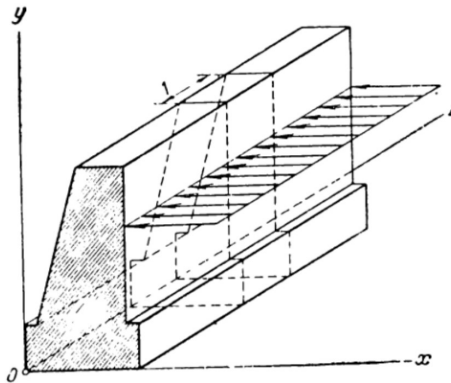


Рис. 1. Плоская деформация возникает в теле плотины

Лекция №5 (Теория упругости)

Плоская деформация наблюдается также в сечениях длинных толстостенных труб, находящихся под действием внутреннего радиального давления, не изменяющегося по длине трубы и в длинном своде подземного тоннеля.

Плоское напряженное состояние

Тело находится в условиях плоского напряженного состояния, если напряжения на всех элементарных площадках, параллельных плоскости XOY , равны нулю ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), а напряженное состояние во всех точках, лежащих на одном перпендикуляре к этой плоскости, одинаково.

В этом случае

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \Rightarrow W = W(x, y, z),$$

т.е. плоские сечения, перпендикулярные оси z , при такой деформации уже не будут плоскими.

Примером такого тела может служить тонкая пластинка толщиной h , нагруженная по боковой поверхности (ребру) силами, параллельными плоскости пластины и равномерно распределёнными по её толщине (рис. 2).

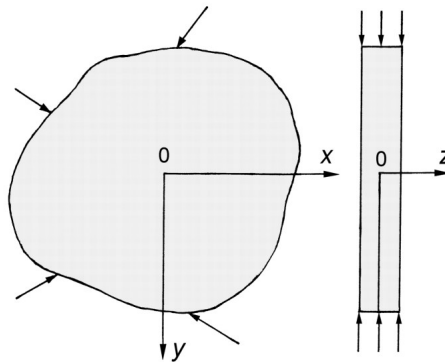


Рис. 2. Тонкая пластинка и приложенные к ней нагрузки

В этом случае также возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации. Компоненты тензора напряжений $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ на обеих плоскостях пластины равны нулю. Так как пластинка тонкая, то можно считать, что они равны нулю и внутри пластины. Тогда напряжённое состояние будет определяться только компонентами, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, которые не зависят от координаты z , т. е. не меняются по толщине пластины, а являются функциями только x и y .

Таким образом, в тонкой пластине возникает следующее напряжённое состояние:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y), & \sigma_z &= 0, \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y), & \tau_{yz} &= 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y), & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Лекция №5 (Теория упругости)

В отношении напряжений плоское напряжённое состояние отличается от плоской деформации условием $\sigma_z = 0$. Кроме того, из закона Гука с учётом, что $\sigma_z = 0$ для линейной деформации ε_z получаем, что она не равна нулю:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0.$$

Следовательно, основания пластины будут искривляться, так как появятся перемещения $W = \varepsilon_z \cdot z = -\frac{\nu \cdot z}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ по оси z .

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации: дифференциальные уравнения равновесия (1), условия на поверхности (2), уравнения Коши (3) и уравнения неразрывности деформаций (4) сохраняют такой же вид в задаче о плоском напряжённом состоянии.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (6)$$

Формулы (6) отличаются от формул (5) закона Гука для плоской деформации только значениями упругих постоянных: E и E_1 , ν и ν_1 .

В обратной форме закон Гука запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ зависят лишь от двух переменных x и y , $\sigma_z = 0$, а напряжения τ_{xz}, τ_{yz} равны нулю $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ только на основаниях пластины (основания не загружены), то такое напряжённое состояние называется обобщенным плоским напряженным состоянием. Для обобщенного плоского напряженного состояния выполняются те же уравнения, что и для плоского напряженного состояния.

Таким образом, при решении этих двух задач (плоская деформация и плоское напряжённое состояние) можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединять задачи в одну плоскую задачу теории упругости.

В плоской задаче теории упругости восемь неизвестных:

- две компоненты вектора перемещений u и v ;
- три компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$;
- три компоненты тензора деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$.

Для решения задачи используют восемь уравнений:

- два дифференциальных уравнения равновесия (1);
- три уравнения Коши (3);

Лекция №5 (Теория упругости)

– три формулы закона Гука (5), или (6).

Кроме того, полученные деформации должны подчиняться уравнению неразрывности деформаций (4), а на поверхности тела должны выполняться условия равновесия (2) между внутренними напряжениями и интенсивностями внешней поверхностной нагрузки $\bar{X}$, $\bar{Y}$.